

Направление подготовки: 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Наименование образовательной программы: Электрический транспорт

Уровень образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Дисциплина:

"Моделирование устройств электрической тяги"

**Комаров В.Г. Лабораторное занятие № 7 15.10.2026 г.
Методические указания**

Тема: Использование критериев подобия при имитационном моделировании движения транспортных средств

1. Общие сведения

Число Рейнольдса (Re) — это безразмерный критерий подобия, который характеризует соотношение между силами инерции и силами вязкости в потоке жидкости или газа. Оно позволяет определить режим течения (ламинарный или турбулентный) и широко применяется в гидродинамике, аэродинамике и теплообмене. В контексте сопротивления движению судов он используется для описания закономерностей взаимодействия корпуса судна с водой.

Формула числа Рейнольдса

Классическая запись критерия Рейнольдса выглядит так:

$$Re = \rho \cdot v \cdot L / \mu = v \cdot L / \nu,$$

где:

- ρ — плотность среды (кг/м³);
- v — характерная скорость потока (м/с);
- L — характерный линейный размер (м);
- μ — динамическая вязкость (Па·с);
- $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость (м²/с).

Физический смысл

Число Рейнольдса показывает, какие силы доминируют в потоке:

- $Re \ll 1$ — вязкие силы подавляют инерцию (ползущее течение).
- $Re \gg 1$ — инерция доминирует, появляется турбулентность.

Число Рейнольдса — индикатор того, какие силы доминируют в рассматриваемом течении: при низких значениях преобладают вязкие силы и течение характеризуется как ламинарное, при высоких — доминируют силы инерции, и течение становится турбулентным.

В динамически подобных системах числа Рейнольдса равны между собой. При этом картины вихреобразования и пограничные слои будут геометрически подобны.

Это один из ключевых критериев подобия в механике жидкости, который позволяет переносить результаты экспериментов с модели на натурный объект при равенстве чисел Рейнольдса.

Разделение сопротивления движению.

При моделировании сопротивления движению судов число Рейнольдса используется вместе с числом Фруда. Уильям Фруд предложил разделять полное сопротивление судна на две составляющие: волновую и вязкостную. Число Фруда отвечает именно за волновую часть, тогда как вязкостная определяется через число Рейнольдса.

Полное динамическое подобие явлений ходкости достигается при одновременном равенстве чисел Фруда и Рейнольдса.

При этом:

- **Равенство чисел Рейнольдса** важно, например, при изучении движения подводной поверхности, выступающих частей и других элементов судна, а также для судов, движущихся с малыми скоростями в водоизмещающем режиме.
- **Равенство чисел Фруда** обеспечивает геометрическое подобие волнообразования.

Критерий подобия Фруда (число Фруда, Fr) — это безразмерный параметр, который характеризует соотношение между инерционными силами и силами тяжести при движении судна. Он играет ключевую роль в определении волновой (гравитационной) составляющей сопротивления воды движению судна.

Формула числа Фруда

В судостроении используется следующая формула:

$$Fr = V / \sqrt{g \cdot L}$$

где:

- V — скорость судна, м/с;
- g — ускорение свободного падения, м/с²;
- L — характерный размер судна (обычно длина по ватерлинии для водоизмещающих судов), м.

Для судов с динамическим поддержанием, у которых длина по ватерлинии меняется в процессе движения, в качестве характерного размера может использоваться ширина (B) или корень кубический из объёмного водоизмещения ($\sqrt[3]{V}$). При исследовании движения на мелководье характерным размером выступает глубина воды (H): $Fr = V / \sqrt{g \cdot H}$.

Физический смысл

Число Фруда выражает отношение инерционных сил к силам тяжести. При равенстве чисел Фруда для двух судов (модели и натуре) создаваемые ими волновые картины будут геометрически подобны. Это означает, что и волновое сопротивление у таких судов будет одинаковым.

Применение в модельных испытаниях

Равенство чисел Фруда — основа для пересчёта результатов испытаний модели в опытовом бассейне на натурное судно. Например, если модель выполнена в масштабе 1:100, то для

воспроизведения той же волновой картины её нужно буксировать со скоростью в 10 раз меньшей, чем у реального судна.

Моделирование сопротивления движению судна

Гидродинамические силы, действующие на элементарную площадку подводной (смоченной) поверхности судна $d\Omega$ при его движении показаны на рис. 1.

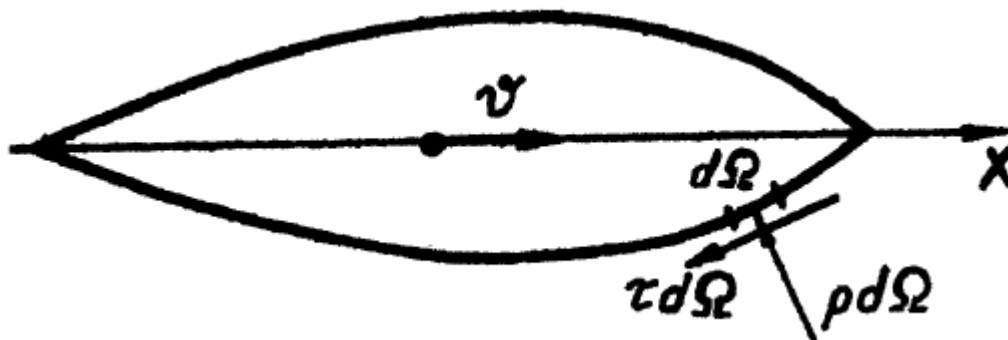


Рис. 1

В общем случае сопротивление движению судна можно разделить на следующие составляющие.

Сопротивление вязкостного трения.

$$W_m = 0,5 \zeta_{mn} \rho v^2 \Omega, \text{ Н}$$

где ζ_{mn} - коэффициент сопротивления трения гидродинамической поверхности корпуса,

ρ — плотность воды, кг/м³,

v — скорость судна относительно воды, м/с,

Ω — площадь подводной (смоченной) поверхности судна, м².

Сопротивление вязкостного трения обусловлено вязкостью жидкости, поэтому коэффициент ζ_{mn} определяется критерием подобия Рейнольдса

$$Re = \frac{v \cdot L}{\mu},$$

где v — скорость судна относительно воды, м/с,

L — длина корпуса вдоль ватерлинии, м,

μ - кинематический коэффициент вязкости воды, м²/с, зависящий от температуры воды.

Таблица 1. Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды от ее температуры

$t\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\mu \cdot 10^{+6}, \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$	$t\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\mu \cdot 10^{+6}, \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$	$t\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\mu \cdot 10^{+6}, \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$
0	1,79	12	1,24	20	1,01
2	1,67	13	1,20	22	0,96
4	1,57	14	1,17	24	0,92
6	1,47	15	1,14	26	0,88
8	1,39	16	1,11	28	0,84
9	1,35	17	1,08	30	0,80
10	1,31	18	1,06		
11	1,27	19	1,03		

П р и м е ч а н и е : Взятые из таблицы значения должны быть уменьшены в 10^6 раз. Так, например, при 4°C истинное значение $\mu = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ М}^2/\text{с}$.

Обычно лежит в пределах $1,5 \dots 2,3 \cdot 10^{-3}$.

Таблица 2. Зависимость коэффициента сопротивления трения от числа Рейнольдса

Re	$C_m \cdot 10^3$	Re	$C_m \cdot 10^3$	Re	$C_m \cdot 10^3$	Re	$C_m \cdot 10^3$	Re	$C_m \cdot 10^3$
$1 \cdot 10^5$	7,19	$1 \cdot 10^6$	4,45	$1 \cdot 10^7$	3,01	$1 \cdot 10^8$	2,12	$1 \cdot 10^9$	1,56
$2 \cdot 10^5$	6,16	$2 \cdot 10^6$	3,94	$2 \cdot 10^7$	2,69	$2 \cdot 10^8$	1,95	$2 \cdot 10^9$	1,45
$3 \cdot 10^5$	5,66	$3 \cdot 10^6$	3,68	$3 \cdot 10^7$	2,52	$3 \cdot 10^8$	1,83	$3 \cdot 10^9$	1,38
$4 \cdot 10^5$	5,35	$4 \cdot 10^6$	3,51	$4 \cdot 10^7$	2,42	$4 \cdot 10^8$	1,76	$4 \cdot 10^9$	1,33
$5 \cdot 10^5$	5,11	$5 \cdot 10^6$	3,36	$5 \cdot 10^7$	2,36	$5 \cdot 10^8$	1,70	$5 \cdot 10^9$	1,29
$6 \cdot 10^5$	4,97	$6 \cdot 10^6$	3,26	$6 \cdot 10^7$	2,30	$6 \cdot 10^8$	1,66	$6 \cdot 10^9$	1,27
$7 \cdot 10^5$	4,77	$7 \cdot 10^6$	3,18	$7 \cdot 10^7$	2,25	$7 \cdot 10^8$	1,64	$7 \cdot 10^9$	1,25
$8 \cdot 10^5$	4,66	$8 \cdot 10^6$	3,12	$8 \cdot 10^7$	2,20	$8 \cdot 10^8$	1,62	$8 \cdot 10^9$	1,23
$9 \cdot 10^5$	4,55	$9 \cdot 10^6$	3,06	$9 \cdot 10^7$	2,16	$9 \cdot 10^8$	1,60	$9 \cdot 10^9$	1,21

П р и м е ч а н и е : Коэффициент ζ_{mn} определяется по взятым из таблицы значениям C_m согласно выражению $\zeta_{mn} = C_m \cdot 10^{-3}$. Например, для $Re = 2 \cdot 10^7$ истинное значение $\zeta_{mn} = C_m \cdot 10^{-3} = 2,69 \cdot 10^{-3}$.

Сопротивление формы.

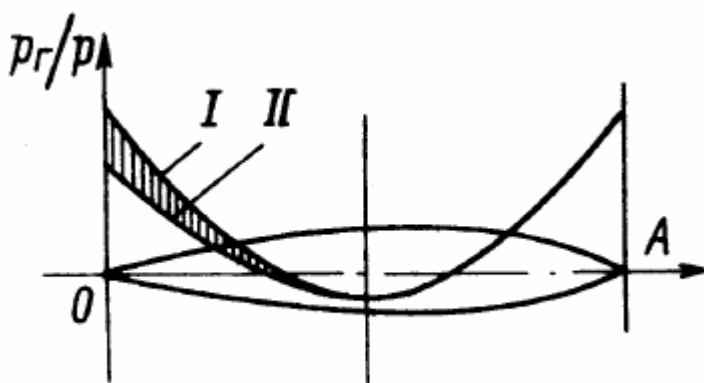


Рис. 2

Эпюра давлений при обтекании корпуса идеальной (I) и вязкой (II) жидкостью.

Сопротивление формы можно определить по известной формуле:

$$W_{\phi} = 0,5 \zeta_{\phi} \rho v^2 \Omega,$$

где ζ_{ϕ} - коэффициент сопротивления формы.

Коэффициент сопротивления формы определяется геометрическими параметрами формы реального судна и его выступающих частей.

Волновое сопротивление.

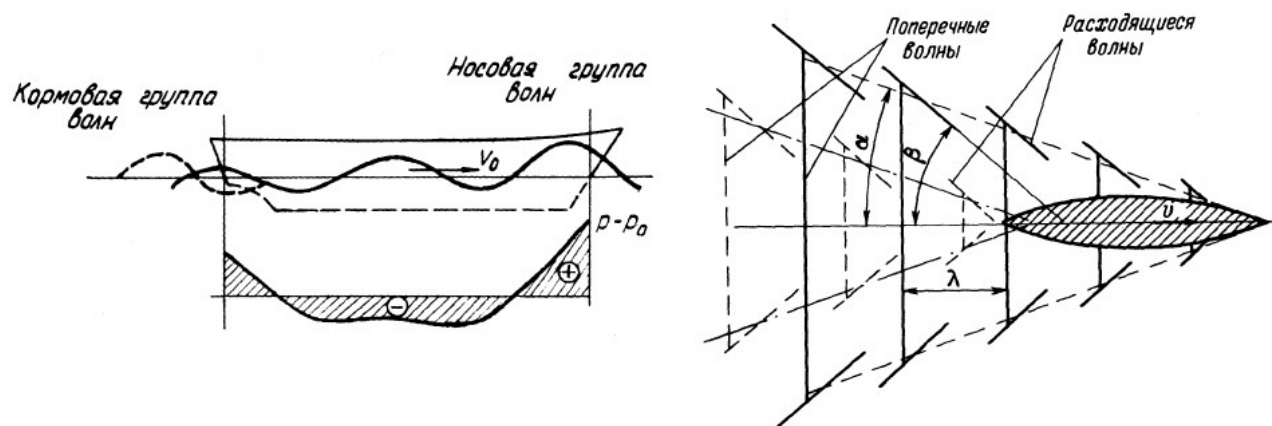


Рис. 3

Волновое сопротивление определяется по формуле

$$W_{\epsilon} = 0,5 \zeta_{\epsilon} \rho v^2 \Omega,$$

где ζ_{ϵ} - коэффициент волнового сопротивления.

Волновое сопротивление определяется критерием подобия Фруда

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}},$$

где v - скорость движения судна относительно воды, м/с,

g — ускорение свободного падения, м/с²,

L — длина корпуса вдоль ватерлинии, м.

При $Fr = 0,35 \dots 0,50$ волновое сопротивление W_{ϵ} наибольшее и является одной из главных составляющих полного сопротивления судна (40 ... 60%). При уменьшении числа Фруда, W_{ϵ} уменьшается и при $Fr < 0,15$ практически отсутствует.

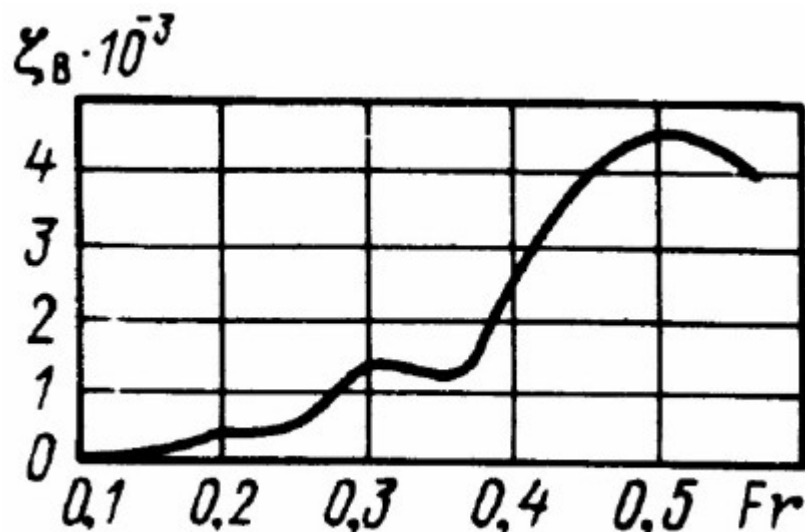


Рис. 4. Зависимость ζ_b от Fr .

Воздушное сопротивление.

$$W_{\text{возд}} = 0,5 \zeta_{\text{возд}} \rho_{\text{в}} v_{\text{в}}^2 S,$$

где $\zeta_{\text{возд}}$ - коэффициент воздушного сопротивления;

$\rho_{\text{в}}$ - плотность воздуха;

S - площадь проекции надводной части судна на плоскость мидель-шпангоута;

$v_{\text{в}}$ - скорость обтекания воздухом надводной части судна.

Полное сопротивление движению судна.

Силу полного сопротивления движению судна будем определять для условий спокойной и глубокой воды, то есть при этом не учитывается влияние ряда факторов: ветра, ветрового волнения, течения, стесненности водного пути по глубине и ширине.

Расчет полной силы сопротивления движению выполняется по формуле

$$W = W_H + W_A,$$

где W_H — гидравлическое сопротивление воды, Н;

W_A — аэродинамическое сопротивление воздуха, Н.

В общем случае, в соответствии с вышеизложенным, сила гидравлического сопротивления воды определяется выражением

$$W_H = C_H \cdot S_H \cdot \frac{\rho_H \cdot v^2}{2},$$

где C_H — коэффициент полного гидравлического сопротивления воды,

S_H - площадь смоченной поверхности корпуса судна, м²,

ρ_H — плотность воды, кг/м³.

Эта сила направлена против скорости движения, её величина пропорциональна характерной площади поверхности корпуса судна S_H , контактирующей с водной средой, плотности этой среды ρ и квадрату скорости движения судна V .

В общем случае сила аэродинамического сопротивления воздуха определяется аналогичным выражением

$$W_A = C_A \cdot S_A \cdot \frac{\rho_A \cdot v^2}{2},$$

где C_A — безразмерный аэродинамический коэффициент сопротивления воздуха, получаемый из критериев подобия, например, чисел Рейнольдса и Фруда в аэродинамике.,

S_A - характерная площадь поперечного сечения надводной части судна, м²,

ρ_A — плотность воздуха, кг/м³.

Эта сила также направлена против скорости движения, её величина пропорциональна характерной площади надводной части судна S_A , контактирующей с воздушной средой, плотности воздушной среды ρ_A и квадрату скорости движения судна V .

Для расчётов сопротивления движению судна обычно используют указанную формулу в приведённом к нормальной плотности воздуха виде

$$W_A = \alpha \cdot S_A \cdot V^2 \text{ Н},$$

где α - коэффициент аэродинамического сопротивления судна, Н·с²/м⁴;

S_A — площадь поперечного сечения надводной части судна, м²;

V — скорость движения судна, м/с.

Пример полного сопротивления движению для реального судна

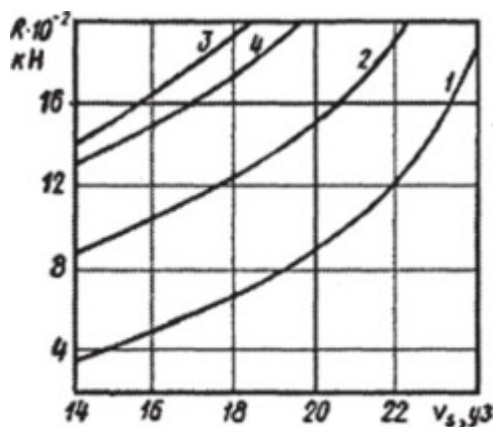


Рис. 5. Сопротивление движению судна «Вояж» при движении на тихой воде (1); в штормовых условиях при 2 и 3 баллах (2 и 3); при встречном течении 1 м/с (4).

Расчет силы гидравлического сопротивления движению судна в водоизмещающем режиме движения

Для расчета сопротивления воды движению судна необходимо предварительно определить смоченную поверхность судна. Предварительный расчет площади S_H смоченной поверхности судна катамаранного типа может быть произведён по упрощённой формуле

$$S_H = N \cdot L \cdot (1.36 \cdot T + 1.13 \cdot \delta \cdot B) ,$$

где N — количество понтонов катамарана;

L - длина понтонов по ватерлинии, м;

T - осадка понтонов при максимальной полной массе судна, м;

δ - коэффициент полноты водоизмещения;

B — ширина понтона по ватерлинии, м.

Таблица 3.

Зависимость $K_1(\delta, L/T)$

L/T	δ			
	0,5	0,6	0,7	0,8
20	1,197	1,246	1,306	1,385
30	1,170	1,220	1,278	1,354
40	1,139	1,185	1,241	1,311
50	1,096	1,137	1,187	1,256
60	1,046	1,081	1,124	1,185

Таблица 4.

$\zeta'_w(\text{Fr}, \delta)$

Fr	δ					
	0,50	0,60	0,66	0,70	0,76	0,80
0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,03
0,14	0,02	0,06	0,10	0,14	0,23	0,34
0,18	0,12	0,22	0,30	0,38	0,56	0,75
0,22	0,32	0,46	0,58	0,70	0,95	1,24
0,26	0,66	0,86	1,02	1,17	1,59	2,14
0,30	1,21	1,46	1,70	1,96	2,80	3,14

Таблица 5.

Зависимость $\Delta\zeta'_w(\text{Fr}, L/B)$

Fr	L/B					
	5	6	7	8	9	10
0,1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,14	0,108	0,044	0,000	-0,032	-0,051	-0,057
0,18	0,222	0,089	0,000	-0,063	-0,108	-0,122
0,22	0,329	0,139	0,000	-0,095	-0,165	-0,196
0,26	0,424	0,184	0,000	-0,139	-0,241	-0,291
0,30	0,525	0,247	0,000	-0,200	-0,342	-0,418

Таблица 6.

Зависимость $K_2(B/T)$

B/T	3	4	5	6	7	8
K_2	1,338	1,188	1,075	1,000	0,944	0,906

Расчет и построение зависимости сопротивления движения судна от скорости производим с помощью встроенного в *Scilab* текстового редактора *SciNotes*, позволяющего написать и отладить программу, результат выполнения которой появится в командном окне.

```
//Расчет параметров сопротивления движению электрохода
//@AQUABOT_MOVE_RESISTANCE
//-----//
//Исходные данные:
L=18;      //Длина судна по КВЛ, м
B=5;       //Ширина судна по КВЛ, м
T=0.2;     //Осадка судна в грузу, м
δ=0.7;     //Коэффициент полноты водоизмещения
μ=1.14E-6  //Кинематический коэффициент вязкости воды (при температуре 15°C)
g=9.81;    //ускорение свободного падения, м/с²
ρ=1000;    //Плотность воды, кг/м³
mm=18E3;   //Максимальная масса судна, кг
x=2;       //Число гребных винтов
//-----//
//Расчёт:
m=mm*δ;     //Расчётная масса судна, кг
disp('Расчётная масса судна m, кг :',m)
// Расчёт площади смоченной поверхности судна по формуле Ковалева Шацмана:
V=L*B*T*δ;  //Объёмное водоизмещение судна, м³
```

```

L_=L/(V^(1/3)); //Относительная по объёму длина судна
w_=1.807+0.322*B/T+L_*(0.712-0.0152*L_); //безразмерный коэффициент w
Sc=w_*(V^(2/3)) //Площадь смоченной поверхности, м2
disp('Объёмное водоизмещение судна V, м3 :',V)
disp('Площадь смоченной поверхности Sc, м2 :',Sc)
//-----//
v=[1E-6,1,2,2.5,2.875,3.25,4,4.83] //Скорость судна, м/с
Re=v*L/μ //Число Рейнольдса
disp('Re=', Re)
ξfo=0.455./(log10(Re).^2.58) //Коэффициент вязкого сопротивления эквивалентной
гладкой пластины
disp('ξfo', ξfo)
Δξf=0.3E-3 //Величина надбавки на шероховатость корпуса судна
ξf=ξfo+Δξf //Коэффициент вязкого сопротивления реального судна
K1=1.054 //Коэффициент пропорциональности K1 в зависимости от хар.
судна (выбирается интерполяцией по табл.3)
Δξs=0.1*x*1E-3 //Величина надбавки на выступающие части судна
ξs=K1*ξf+Δξs //Коэффициент вязкостного сопротивления
Fr=v/(sqrt(g*L)) //число Фруда
disp('Fr=', Fr)
kefFrδ=[1E-5,0.175,0.34,0.75,1.24,1.95,3.14,4.61] //Базовое значение коэффициента
волнового сопротивления (таблица 4) ξ_w(Fr,δ)
kefFrLB=[1E-5,0.116,0.236,0.488,0.709,0.811,1.081,1.286] //Надбавка на влияние L/B
(таблица 5) Δξw (Fr,L/B)
ξ_w=kefFrδ/1000 //Базовое значение коэффициента волнового сопротивления
Δξw=kefFrLB/1000 //Надбавка на влияние L/B (таблица 5)
K2=0.187 //Поправочный множитель, учитывающий влияние B/T (таблица 6)
ξw=K2*(ξ_w+Δξw) //Коэффициент волнового сопротивления судна
ξс=ξs+ξw //Полный коэффициент сопротивления судна
//-----//
disp('Число Рейнольдса :',Re)
disp('Полный коэффициент сопротивления судна :',ξс)
W=Sc*ρ*v.^2/2.*ξс //Сопротивление воды движению судна,Н
plot(v,W);
xgrid();
xlabel('Сопротивление воды движению судна','v, м/с','W, Н');
//-----//
D=0.3 //Диаметр используемого винта, м
ΔΨ=[0,0,0,0,0.0039341,0.0107081,0.0242561,0.0392493]
//Поправка ΔΨ (определяется по формуле: ΔΨ=0.3*δ*(Fr-0.2); если Fr<0.2, то ΔΨ=0
Ψ=0.11+0.08*(δ^2)*sqrt(V^(1/3))/D)-ΔΨ //Коэффициент попутного потока
t=0.8*(1+0.25.*Ψ).*Ψ //Коэффициент засасывания t
ve=(1-1.*Ψ).*v //расчетная скорость движителей ve (скорость потока у винта), м/с
F=W./(x*(1-1.*t)) //Требуемый упор винта, Н
//-----//
disp('Коэффициент попутного потока Ψ:',Ψ)
disp('Коэффициент засасывания t:',t)
disp('Скорость движения судна v, м/с :',v)
disp('Скорость потока на винте ve, м/с :',ve)
disp('Сопротивление воды движению судна W, Н :',W)
disp('Упор винта F, Н :',F)
//-----//

```

В результате выполнения программы получаем следующие результаты:

```
-->
exec(' /home/user1/ПРОЕКТЫ/ЭЛЕКТРОВОДОХОД/АКВАБОТ/AQUABOT_MOVE_RESISTANCE.sci '
, -1)

"Объёмное водоизмещение судна V, м3 :"

12.6

"Площадь смоченной поверхности Sc, м2 :"

78.271037

"Re="

15.789474    15789474.    31578947.    39473684.    45394737.    51315789.
63157895.    76263158.

"ξfo"

0.2852653    0.0027948    0.0025145    0.0024325    0.0023831    0.0023409
0.0022717    0.0022113

"Fr="

7.525D-08    0.0752539    0.1505079    0.1881349    0.2163551    0.2445753
0.3010158    0.3634765

"Число Рейнольдса :"

15.789474    15789474.    31578947.    39473684.    45394737.    51315789.
63157895.    76263158.

"Полный коэффициент сопротивления судна :"

0.3011859    0.0035163    0.0032741    0.0033116    0.0033924    0.0034998
0.0036999    0.0039494

"Коэффициент попутного потока Ψ:"

0.2045477    0.2045477    0.2045477    0.2045477    0.2006136    0.1938396
0.1802916    0.1652984

"Коэффициент засасывания t:"

0.1720061    0.1720061    0.1720061    0.1720061    0.1685401    0.1625865
0.1507343    0.1377035

"Скорость движения судна v, м/с :"
```

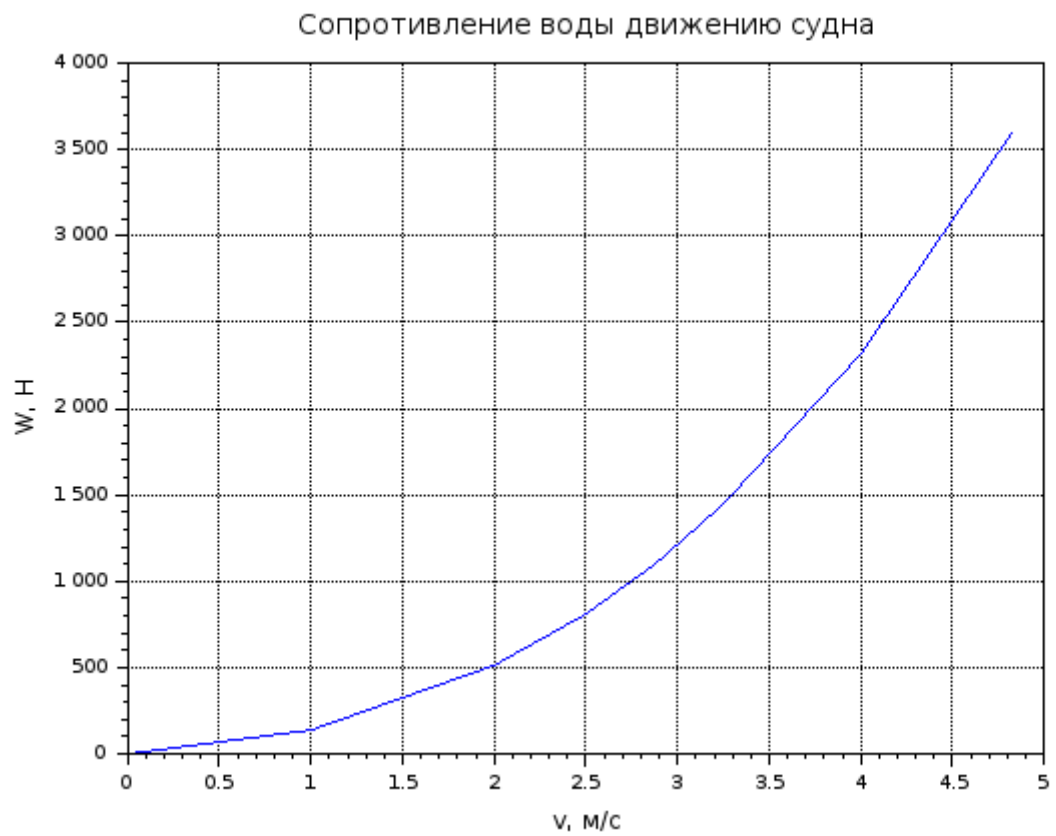
0.000001 1. 2. 2.5 2.875 3.25 4. 4.83

"Скорость потока на винте v_e , м/с :"

0.0000008 0.7954523 1.5909045 1.9886306 2.2982358 2.6200212
3.2788334 4.0316085

"Соппротивление воды движению судна W , Н :"

1.179D-08 137.61281 512.54134 810.0036 1097.3826 1446.6956
2316.7418 3605.7992



Шаблон оформления отчёта

Национальный исследовательский университет "МЭИ"



ИЭТЭ

Кафедра ЭКАОиЭТ.

Отчет по лабораторной работе №7 на тему:

«Использование критериев подобия при моделировании движения транспортных средств»

Вариант задания №

Выполнил:	Иксов А. Б.
Группа:	ЭЛ-05-ХХ
Проверил:	Комаров В. Г.

Москва 2026

Задание.

...

Дано.

...

Расчёты

...

Построение модели

...

Результаты моделирования

...

Анализ результатов моделирования