Направление подготовки: 140400 Электроэнергетика и электротехника

Профиль подготовки: Электрический транспорт

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Дисциплина: "Системы и устройства автоматического управления электроподвижным составом"

Комаров В.Г. Лекция 12 12.05.2026 г.

Тема: Анализ цифровых систем управления

1. Понятие цифровой системы управления

Цифровая система — это подкласс дискретных систем, в которых хотя бы один сигнал дискретизируется как по времени, так и квантуется по уровню. В таких системах для управления объектом используется цифровое управляющее устройство (например, микропроцессор, ЭВМ). Таким образом, все цифровые системы являются дискретными, но не все дискретные системы — цифровые. Цифровые системы акцентируют внимание на использовании цифровых технологий для управления и обработки сигналов.
Ключевые особенности цифровых систем:

- алгоритмы управления реализуются в форме программ для цифровых управляющих устройств;
- происходит преобразование аналоговых сигналов в цифровые (через АЦП) и цифровых сигналов в аналоговые (через ЦАП);
- обработка сигналов происходит последовательно, одно значение за другим;
- возможность реализации сложных алгоритмов управления, включая адаптивные и логические;
- предсказуемая точность реализации алгоритмов;
- лёгкость коррекции алгоритмов и перенастройки на другие алгоритмы.

2. Квантование сигналов

Особенностью цифровых систем управления непрерывными динамическими объектами является квантование всех входных непрерывных (аналоговых) сигналов с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП). В результате цифровой регулятор использует для управления только значения входов в моменты квантования, то есть при $t = 0, T, 2T, 3T, \ldots$, где T – интервал квантования. Получение выборки отдельных значений аналогового сигнала называется квантованием по времени (англ. sampling). Например, квантование синусоидального сигнала с периодом T

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

где A – амплитуда сигнала, ω – угловая частота в рад/с, а φ – фаза в радианах, состоит в том, что из него выбираются значения

$$x[k] = x(kT) = A \sin(\omega kT + \varphi)$$

при целых значениях $k \geq 0$. Последовательность значений

$$\{x[k]\} = \{x[0],\ x[1],\ x[2], ...\}$$

представляет собой оцифрованный (дискретный) сигнал. Системы с квантованием сигналов по времени называют импульсными системами. Вся информация о значениях сигнала между моментами квантования теряется. Однако согласно теореме Котельникова-Шеннона сигнал теоретически всё же можно точно восстановить по его дискретным значениям, если частота квантования более чем в 2 раза превышает максимальную частоту в спектре сигнала. То есть синусоиду с частотой ω нужно квантовать с частотой большей, чем 2ω. Все измеренные значения хранятся в памяти компьютера как целые числа, разрядность которых определяется разрядностью АЦП. Из-за этого близкие, но различные значения могут при квантовании получить одинаковый числовой код. Этот процесс называется квантованием по уровню. Системы, в которых присутствует как квантование по времени, так и квантование по уровню, называют цифровыми системами. Квантование по уровню – это ещё один источник потери информации при квантовании. Квантование делает систему нелинейной. Современные АЦП имеют достаточно высокую разрядность (12-32 бита), поэтому при теоретическом исследовании цифровых систем квантованием по уровню обычно пренебрегают, а для уточнения результата моделируют его как эквивалентный шум на входе цифровой части. Управляющий сигнал (цифровой код), рассчитанный с помощью цифрового регулятора, нужно преобразовать в импульсный или аналоговый сигнал управления исполнительным механизмом, например, импульсным преобразователем, рулевым устройством и т.п. Эту функцию выполняет устройство-экстраполятор (англ. hold), который реализуется в виде цифро-импульсного или цифро-аналогового преобразователя (ЦАП). Простейший из экстраполяторов – фиксатор нулевого порядка (англ. zero-order hold) – удерживает на выходе полученное значение входного сигнала до следующего момента квантования. Для исследования процессов квантования и восстановления аналоговых сигналов в XCOS можно собрать модель, показанную на Рис. 1. На входе – синусоидальный сигнал с генератора (амплитуда 1, период 0.5, сдвиг фазы 0,2). Он поступает на устройство квантования и фиксации (англ. sample-and-hold), которое представляет собой квантователь (АЦП) и установленный за ним фиксатор нулевого порядка (ЦАП).

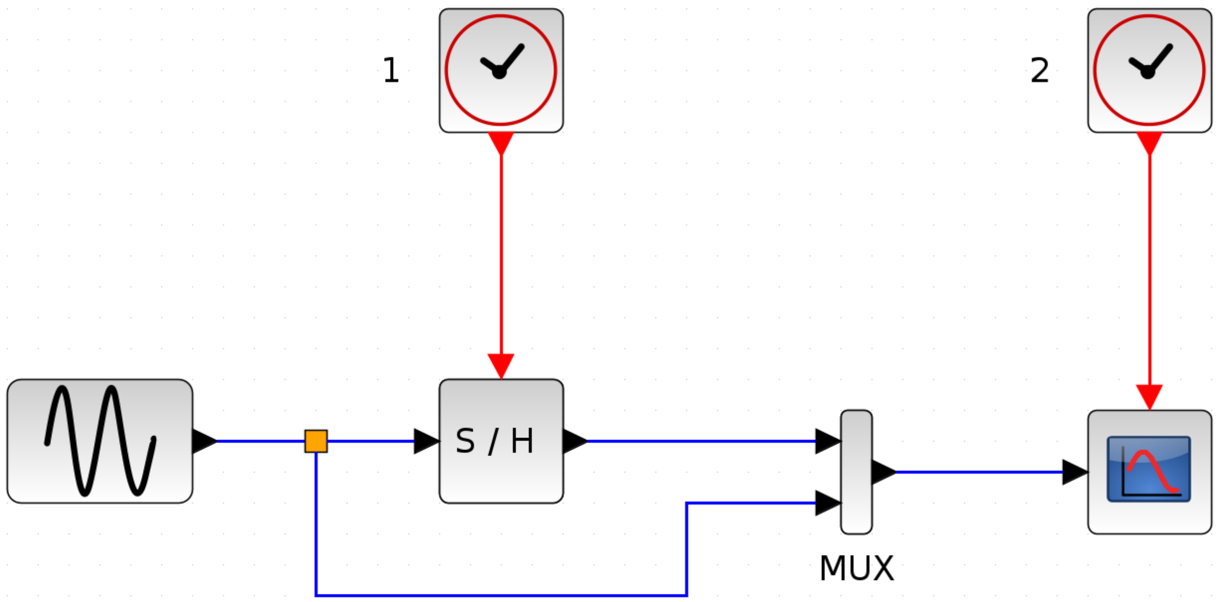

Рис. 1.

Через мультиплексор на осциллограф подаются два сигнала – преобразованный блоком квантования и исходный. Часы с номером 1 задают период квантования сигнала (он равен 1), а часы с номером 2 – период фиксации значений выхода, его можно установить достаточно малым (например, 0,001), чтобы скачки в моменты квантования не превратились в наклонные линии. Результат моделирования показан на Рис. 2.

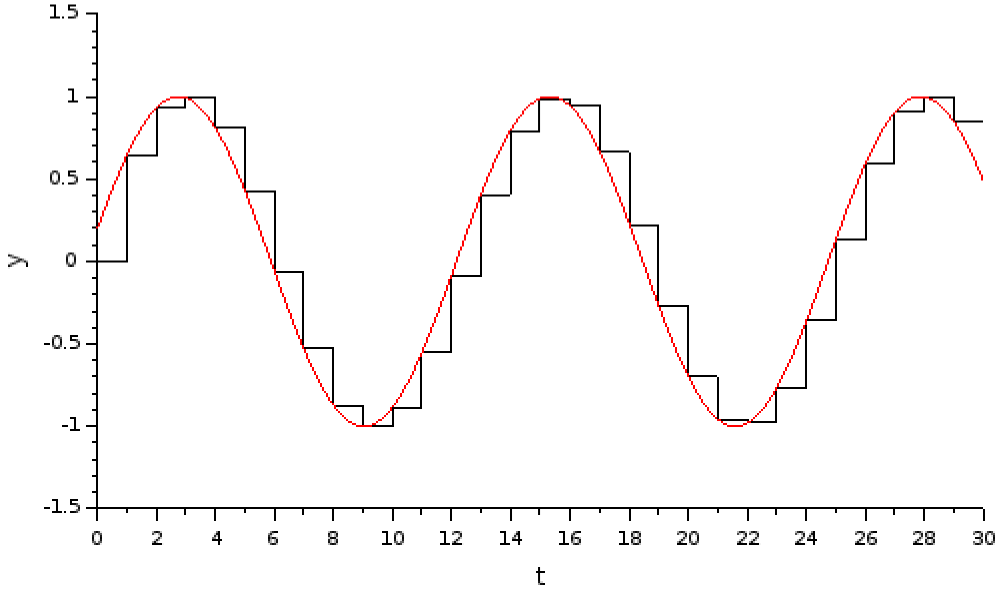

Рис. 2.

В результате квантования и восстановления аналогового сигнала

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

получается ступенчатый сигнал, который сохраняет постоянное значение на каждом временном отрезке длиной *T* и описывается формулой

$$y(t) = x(kT) = A\sin(\omega kT + \varphi),\ kT \le t < (k+1)T\ .$$

3. Дискретизация аналоговых объектов

Рассмотрим разомкнутую систему на Рис. 3, в которой дискретный входной сигнал {v[k]} (например, с компьютера) поступает на экстраполятор с передаточной функцией H(s), а аналоговый сигнал u(t) с выхода экстраполятора – на вход непрерывного объекта с передаточной функцией P(s).

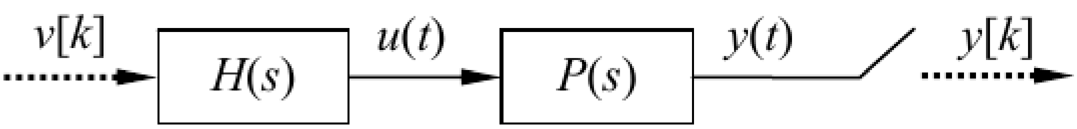

Рис. 3.

Мы хотим построить дискретную модель, которая связывает входной дискретный сигнал {v[k]} с дискретным выходным сигналом {y[k]}, который получен в результате квантования выходного аналогового сигнала y(t) с тем же периодом T. Таким образом, требуется найти передаточную функцию D(z), которая связывает два изображения: $Y(z) = D(z) \cdot V(z)$, где V(z) и Y(z) – это изображения входного и выходного дискретных сигналов (Рис. 4).

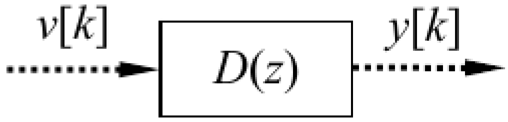

Рис. 4.

Передаточная функция D(z) может быть найдена по формуле:

$$D(z) = Z\{P(s)\,H(s)\}\ .$$

Здесь запись Z {...} означает z-преобразование для оригинала изображения, записанного в фигурных скобках (в данном случае – для произведения передаточных функций экстраполятора и объекта). Если в качестве экстраполятора используется фиксатор нулевого порядка, то

$$H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}=\frac{1-z^{-1}}{s}=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{s}\quad .$$

Здесь использовано равенство z = e ^{sT} . Тогда получаем

$$D(z)=Z\{P(s)\cdot\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{s}\}=\frac{z-1}{z}\cdot Z\{\frac{P(s)}{s}\}\quad .$$

При ручных расчётах можно использовать таблицы z- преобразований. Например, для P (s) =α / (s−β) при использовании фиксатора нулевого порядка получается

$$D(z)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{e^{\beta T}-1}{z-e^{\beta T}}\quad .$$

В среде SciLab такая дискретизация выполняется с помощью встроенной функции dscr:

Dss = dscr(P, T),

где P – модель непрерывного объекта, а T – интервал квантования. Эта функция всегда возвращает дискретную модель в пространстве состояний. Для построения дискретной передаточной функции нужно дополнительно вызвать функцию ss2tf:

D = ss2tf(Dss)

4. Скрытые колебания

В некоторых особых случаях может возникнуть ситуация, когда дискретная модель даёт неправильное представление о соответствующем аналоговом процессе. Например, переходный процесс в дискретном времени имеет апериодический характер, а в непрерывном – колебательный. Это явление называется скрытыми колебаниями.

Рассмотрим объект с передаточной функцией

$$P(s)=\frac{a^2+\pi^2}{(s+a)^2+\pi^2}\quad ,$$

где a – некоторая постоянная. Полюса этой передаточной функции равны:

$$p_{1,2} = -a \pm j\pi\ .$$

При квантовании с периодом T = 2 получаем полюса дискретной модели

$$q_{1,2}=e^{p_{1,2}T}=e^{2(-a\mp j\pi)}=e^{-2a}\cdot e^{\mp j2\pi}\quad .$$

По формуле Эйлера

$$e^{\pm j2\pi} = \cos 2\pi \pm j\sin 2\pi\ .$$

Поскольку cos

$$2\pi = 1,\ \sin 2\pi = 0\ ,$$

получаем $e^{\pm j2\pi} = 1$, так что оба полюса дискретной модели оказываются одинаковыми:

$$q_{1,2} = e^{-2a}\ .$$

Период квантования, для которого два разных полюса непрерывной модели при дискретизации переходят в один и тот же полюс дискретной модели, называется вырожденным. При этом в дискретной модели происходит сокращение множителя в числителе и знаменателе:

$$D(z)=Z\{P(s)\cdot H(s)\}=\frac{(1-e^{-2a})\cdot(z-e^{-2a})}{(z-e^{-2a})^2}=\frac{1-e^{-2a}}{z-e^{-2a}} \quad .$$

Порядок дискретной модели уменьшился по сравнению с непрерывной моделью, и это ведет к потере информации о поведении системы: дискретная модель «не чувствует» колебаний между моментами квантования.

При a > 0 система устойчива, а при a < 0 – неустойчива. Более того, сокращенный множитель становится обязательным сомножителем характеристического полинома замкнутой системы, поэтому при a < 0 система нестабилизируема, то есть нельзя найти регулятор, который обеспечит её устойчивость.

Построим в SciLab дискретную модель описанной системы при.

```
a = 0.4;
W = syslin( "c", a^2+%pi^2, ..
            (%s+a)^2 + %pi^2 );
T = 2;
D = ss2tf( dscr(W, T) )
```

Исходная непрерывная система имеет порядок 2, а полученная дискретная модель – порядок 1:

```
D =
      0.551
      -----------
      - 0.449+ z
```

Это значит, что произошло сокращение множителя в числителе и знаменателе дискретной модели, и следует ожидать скрытых колебаний.

Соберём сначала модель XCOS непрерывной части модели, показанную на Рис. 5.

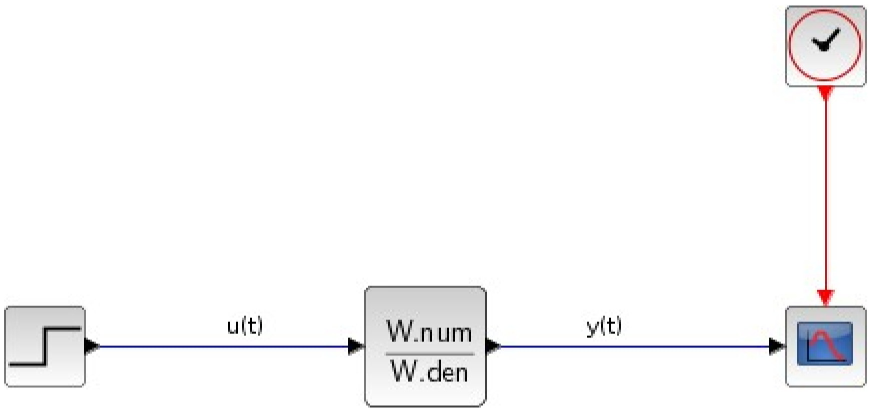

Рис. 5.

После двойного щелчка на блоке источника ступенчатого сигнала появляется окно с его параметрами. В этом окне нужно изменить параметр Step Time с 1 на 0, чтобы начало скачка совпало с началом отсчета времени. Параметры модели установим с помощью контекстного окна. Для этого в меню рабочего окна модели нажмите на раздел «Моделирование», выберите пункт «Установить контекст» и в открывшемся окне введите численные параметры модели. Этот приём позволяет изменять параметры блоков модели, не изменяя вручную модель XCOS. Подтвердите ввод нажатием на кнопку «OK».

Сначала с помощью контекстного окна введём передаточную функцию блока в рабочую область SciLab:

```
a=0.4
W = syslin( "c", a^2+%pi^2, ..
           (%s+a)^2 + %pi^2 )
```

Теперь при определении параметров в окне свойств блока можно ссылаться на числитель и знаменатель этой передаточной функции:

```
Numerator: W.num
Denominator: W.den
```

В часах, которые подсоединены к осциллографу, устанавливаем период 0,001. Они фиксируют сигнал на выходе непрерывной системы. Результаты моделирования показаны на Рис. 6.

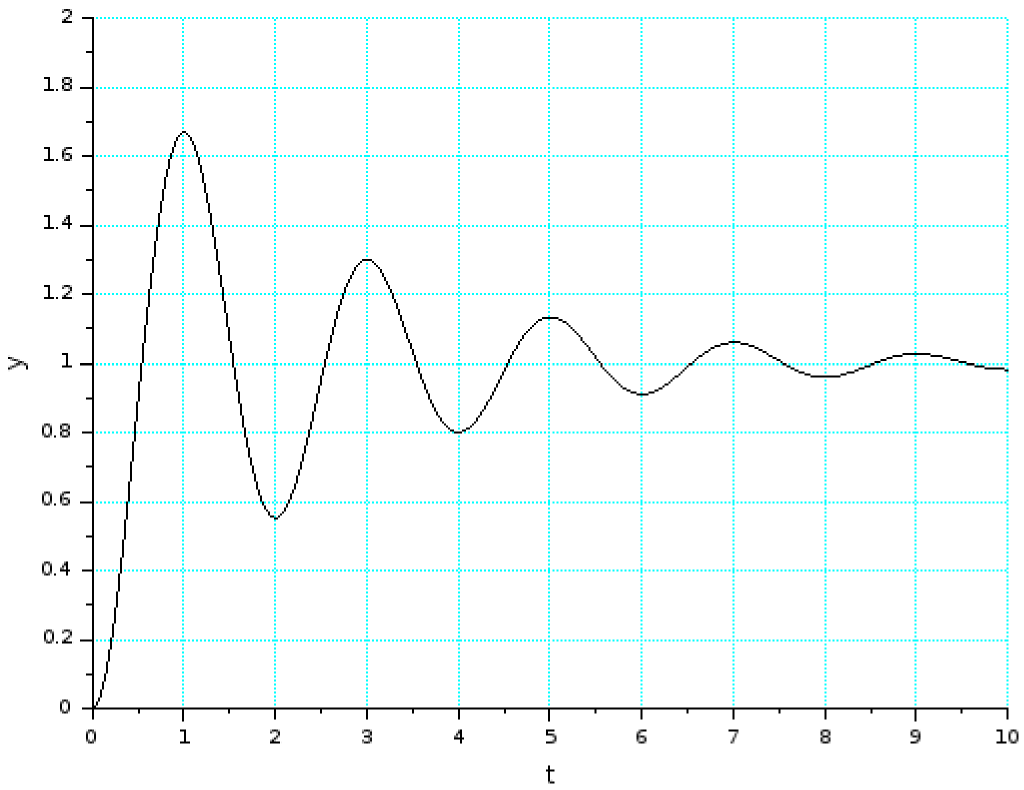

Рис. 6.

Теперь добавим дискретную модель, с периодом работы и моментами фиксации её выхода с помощью отдельных часов с периодом T (Рис. 7).

С помощью контекстного окна добавим параметр периода работы часов дискретизации и передаточную функцию цифрового блока в рабочую область SciLab:

```
T=2
D = ss2tf(dscr(W,T))
```

Теперь при определении параметров в окне свойств цифрового блока можно ссылаться на числитель и знаменатель этой передаточной функции:

```
Numerator: D.num
Denominator: D.den
```

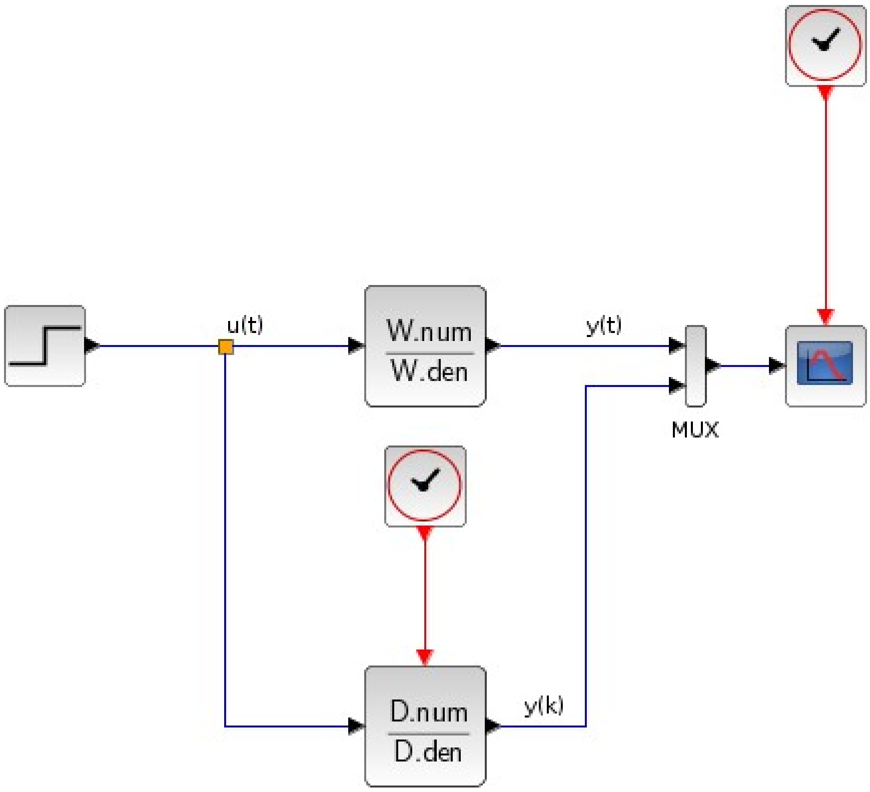

Рис. 7.

Результаты моделирования показаны на Рис. 8. Чёрной линией показано изменение выхода непрерывного объекта, а красной — дискретной модели.

По графику видно, что дискретная модель в точности воспроизводит поведение непрерывного объекта в моменты квантования. Если смотреть только на значения в дискретные моменты времени, кажется, что переходный процесс апериодический. Однако между моментами квантования наблюдаются скрытые колебания.

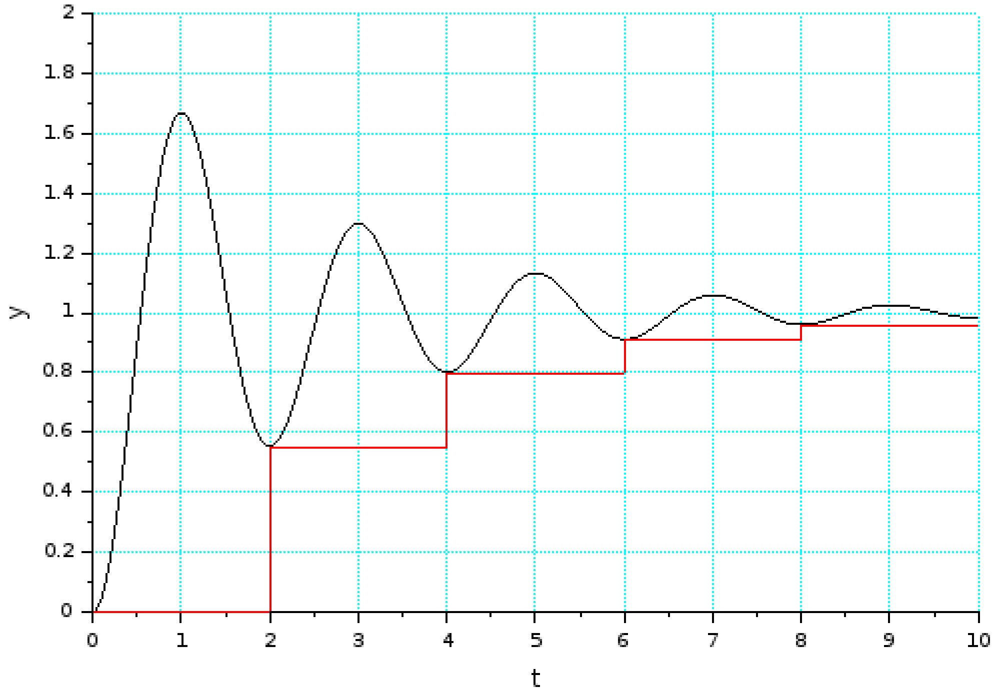

Рис. 8.

Установим параметр T =1.

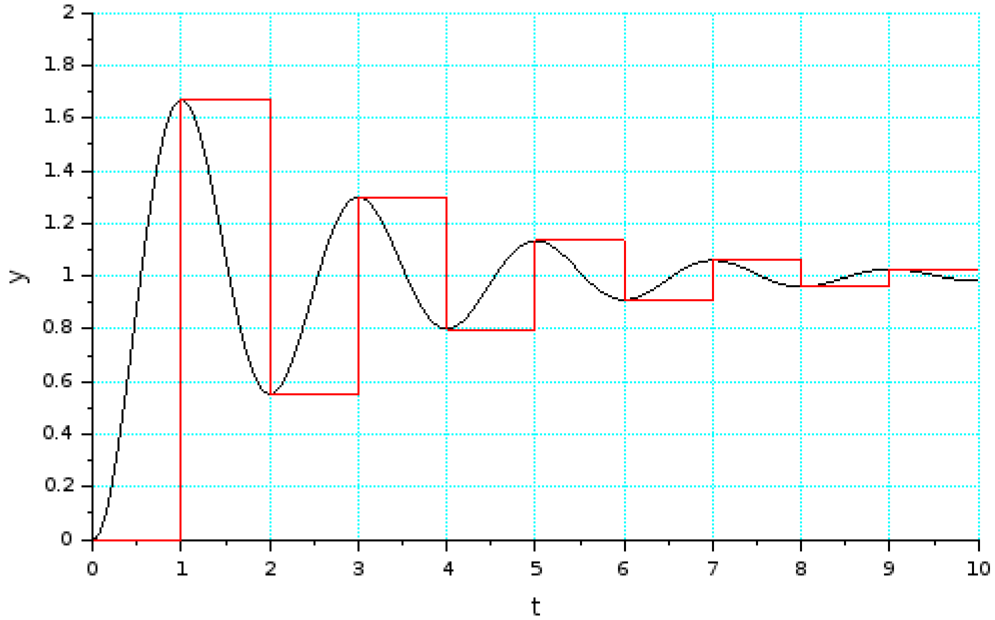

Рис. 9.

Теперь переходный процесс в непрерывном объекте отображается, как колебательный.

5. Дискретизация замкнутой системы

Рассмотрим одноконтурную систему, в которой цифровой регулятор управляет непрерывным объектом (Рис. 10).

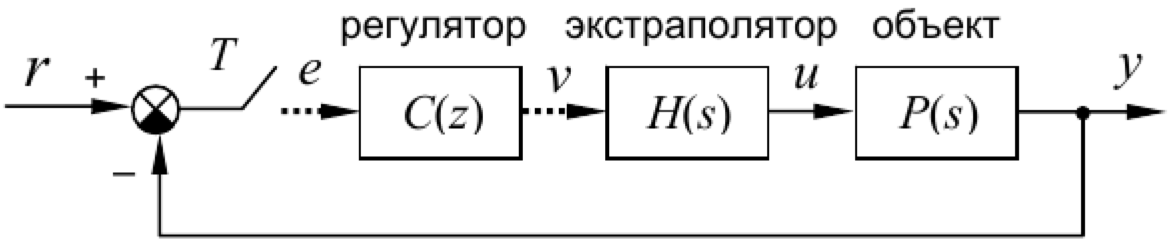

Рис. 10.

Цифровая часть – это регулятор с передаточной функцией C(z), на его вход поступает дискретный сигнал {e[k]} – ошибка управления в моменты квантования. Выход регулятора – это управляющая последовательность {v[k]}, которая поступает на экстраполятор с передаточной функцией H(s). Выход экстраполятора u(t) – это уже аналоговый сигнал, который воздействует на вход объекта управления с передаточной функцией P(s). В этой системе все входные сигналы (здесь это только задающее воздействие r(t)) действуют на импульсные элементы, поэтому можно построить точную дискретную модель, описывающую сигналы в моменты квантования (Рис. 11).

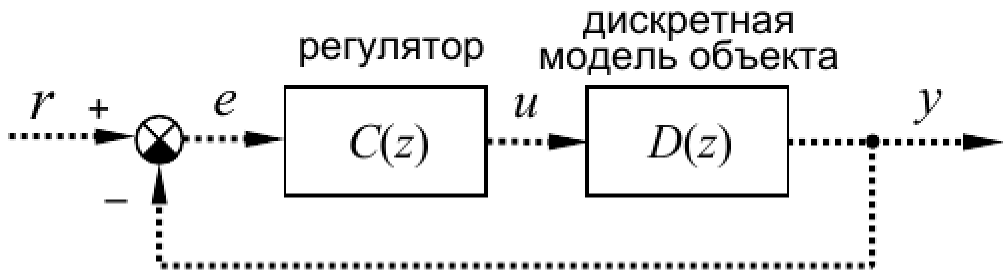

Рис. 11.

На Рис. 11 блок с передаточной функцией D(z) – это дискретная модель приведённой непрерывной части, то есть объекта с экстраполятором, которая получается в результате дискретизации:

$$D(z) = Z\{P(s)\,H(s)\}\;.$$

Если модель непрерывной части P(s) несократима и при дискретизации модель приведённой непрерывной части D(z) также несократима (её порядок равен порядку непрерывной системы), устойчивость полученной дискретной системы эквивалентна устойчивости исходной импульсной системы. Если при дискретизации порядок модели уменьшился (P(s) несократима, а в модели D(z) сократились множители полиномов числителя и знаменателя), это говорит о скрытых колебаниях и о том, что устойчивость системы нельзя проверять по дискретной модели. Если в D(z) сократился неустойчивый сомножитель (с корнями вне единичного круга в плоскости z), то полученная дискретная система может быть нестабилизируема. Это значит, что невозможно найти регулятор, который обеспечивает её устойчивость. Интервал квантования, при котором это происходит, называется патологическим или вырожденным. К счастью, на практике такие случаи встречаются крайне редко.

6. Передаточные функции цифровых систем

Дискретные передаточные функции рассмотренной выше одноконтурной системы вычисляются так же, как и для непрерывных систем. Числитель передаточной функции от входа x к выходу y – это передаточная функция разомкнутой системы от x к y, а знаменатель равен

$$1 + D(z)\cdot C(z).$$

Поэтому для системы на Рис. 10 получаем:

• дискретную передаточную функцию от входа r к выходу y:

$$W(z)=\frac{D(z)\cdot C(z)}{1+D(z)\cdot C(z)}\;,$$

• дискретную передаточную функцию по управлению (от входа r к сигналу управления u):

$$W_u(z)=\frac{C(z)}{1+D(z)\cdot C(z)}\;,$$

• дискретную передаточную функцию по ошибке (от входа r к сигналу ошибки e):

$$W_e(z)=\frac{1}{1+D(z)\cdot C(z)}\;.$$

В SciLab эти передаточные функции могут быть вычислены по следующим формулам:

```
W = D*C / (1 + D*C)
Wu = C / (1 + D*C)
We = 1 / (1 + D*C)
```

Можно также использовать специально введённый оператор «/.». Слева от этого знака записывается передаточная функция разомкнутой системы (между выбранной парой «вход-выход»), а справа – передаточная функция обратной связи. Дискретные передаточные функции по выходу, по управлению и по ошибке могут быть найдены так:

```
W = D*C /. 1
Wu = C /. D
```

```
We = 1 /. D*C
```
Для того чтобы найти статический коэффициент усиления системы между входом и выходом, нужно найти предел соответствующей передаточной функции при z → 1. Например, статический коэффициент усиления системы по ошибке равен

$$k_e = \lim_{z \to 1} W_e(z) = W_e(1) \quad .$$

При единичном входном сигнале (r(t) = 1), установившаяся ошибка равна k_e, а если на вход поступает постоянный сигнал величиной α, то установившаяся ошибка равна $\alpha \cdot k_e$.

Добавим в систему возмущение f, которое действует непосредственно на объект управления (Рис. 12).

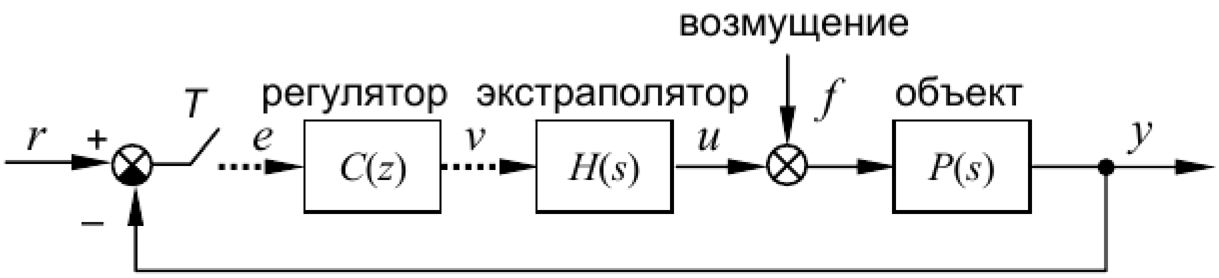

Рис. 12.

Аналоговый входной сигнал f (t) действует не на импульсный элемент, а на непрерывный объект. Все значения сигнала y(t), в том числе и значения в моменты квантования t = kT, зависят от всех предыдущих значений сигнала f (t), а не только от его значений в моменты квантования. Поэтому, строго говоря, дискретной передаточной функции по возмущению – от входа f к выходу y – такая система не имеет. Но можно построить приближенную дискретную модель воздействия возмущения на объект следующим образом. Нужно мысленно установить фиктивный импульсный элемент, работающий с периодом T, и подать квантованный сигнал f на вход экстраполятора (Рис. 13).

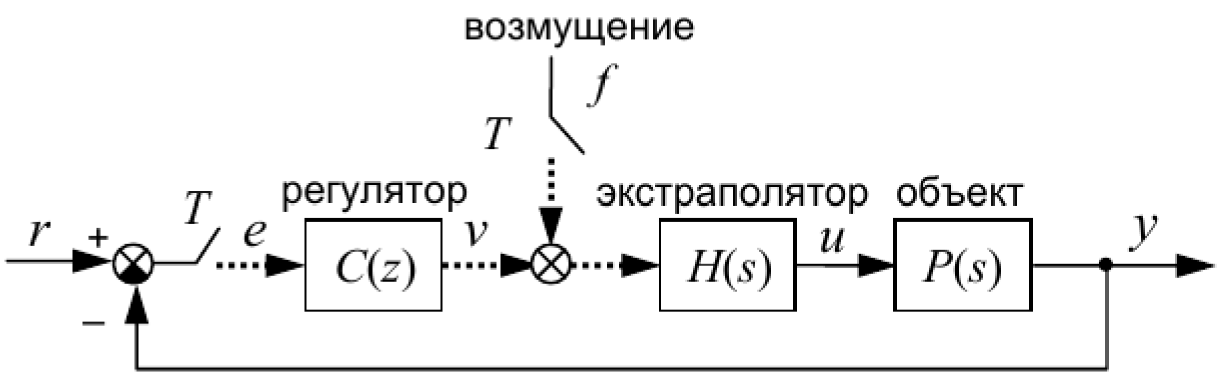

Рис. 13.

В результате дискретизации получается приближённая модель – дискретная система, изображённая на Рис. 14.

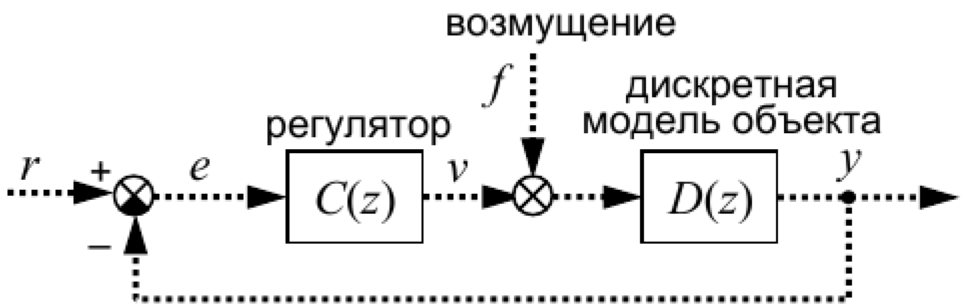

Рис. 14.

Для такой системы дискретная передаточная функция по возмущению (от входа f к выходу y) вычисляется по формуле

$$W_f(z)=\frac{D(z)}{1+D(z)\cdot C(z)} \quad .$$

Для того чтобы определить, компенсирует ли система управления постоянные возмущения (например, боковой ветер), нужно найти статический коэффициент усиления, соответствующий этой передаточной функции, то есть подставить в неё значение z = 1:

$$k_f=\lim_{z\to 1} W_f(z)=W_f(1) \quad .$$

Если этот коэффициент равен 0 (передаточная функция $W_f(z)$ содержит в числителе множитель z – 1), система полностью компенсирует постоянные возмущения.