Направление подготовки: 140400 Электроэнергетика и электротехника

Профиль подготовки: Электрический транспорт

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Дисциплина: "Системы и устройства автоматического управления электроподвижным составом"

Комаров В.Г. Лекция 15 02.06.2026 г.

Тема: СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

7. Регуляторы с двумя степенями свободы

В стандартной одноконтурной системе, с которой мы работали ранее, один регулятор решал все задачи, обеспечивая:

1) компенсацию возмущений, действующих на объект управления;

2) заданное качество переходного процесса;

3) подавление шумов измерений.

Эти задачи часто противоречивы, например, регулятор, хорошо компенсирующий возмущения, часто не может обеспечить выполнение заданных требований (например, ко времени переходного процесса, перерегулированию и т.п.). Поэтому имеет смысл использовать для решения каждой задачи отдельный регулятор. Регулятор, в системе на Рис. 28 состоит из двух блоков, каждый из которых выполняет свою задачу. Регулятор в контуре C0(ζ) проектируется так, чтобы хорошо компенсировать действие возмущения f, а регулятор C1(ζ) обеспечивает заданное качество переходного процесса.

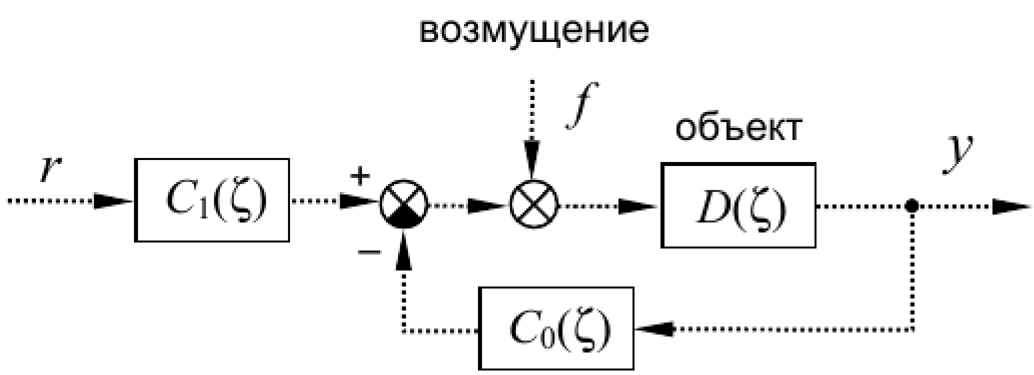

Рис. 28.

Такой регулятор называется регулятором с двумя степенями свободы.

Согласно правилам преобразования структурных схем, передаточная функция такой системы от входа r к выходу y вычисляется как

$$W(\zeta)=C_1(\zeta)\cdot\frac{D(\zeta)}{1+C_0(\zeta)\cdot D(\zeta)}=\frac{C_1(\zeta)\cdot D(\zeta)}{1+C_0(\zeta)\cdot D(\zeta)}\quad .$$

Оба регулятора можно представить в виде отношения полиномов с общим знаменателем, который равен общему кратному знаменателей $C_0(\zeta)$ и $C_1(\zeta)$:

$$C_0(\zeta)=\frac{a_0(\zeta)}{b(\zeta)}\quad ,\quad C_1(\zeta)=\frac{a_1(\zeta)}{b(\zeta)}\quad .$$

Если общий знаменатель «убрать» внутрь контура, получается схема, показанная на Рис. 29.

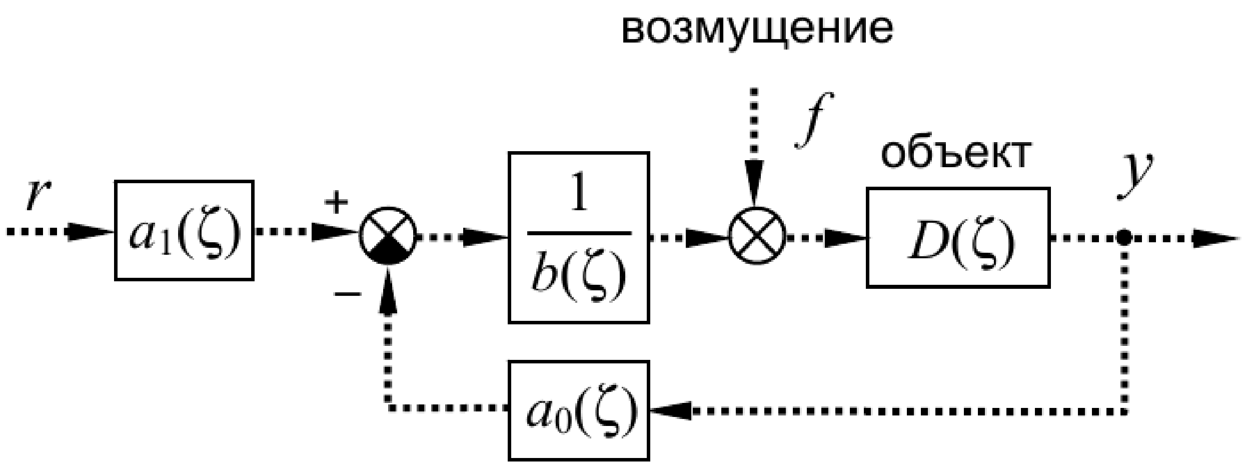

Рис. 29.

Передаточная функция такой системы от входа r к выходу y равна

$$W(\zeta)=\frac{a_1(\zeta)\cdot n(\zeta)}{b(\zeta)\cdot d(\zeta)+a_0(\zeta)\cdot n(\zeta)}\quad ,$$

где $n(\zeta)$ и $d(\zeta)$ – числитель и знаменатель дискретной модели объекта $D(\zeta) = n(\zeta)/ d(\zeta)$.

Задача синтеза регулятора сводится к следующему: выбрать полиномы $a_0(\zeta)$, $a_1(\zeta)$ и $b(\zeta)$ так, чтобы обеспечить заданные свойства замкнутой системы – устойчивость, приемлемое качество переходных процессов и компенсацию возмущений.

Построим регулятор с двумя степенями свободы, который обеспечивает поведение системы, близкое к поведению некоторой эталонной модели. Эталонная модель отражает требования к замкнутой системе управления: быстродействие, перерегулирование, астатизм.

Если требуется обеспечить переходный процесс без перерегулирования, можно выбрать в качестве эталонной модели апериодическое звено

$$W_m(s)=\frac{1}{T_m(s)+1}\quad .$$

Для такого звена переходный процесс заканчивается (с точностью 5%) за время, примерно равное $3\cdot T_m$. Поэтому при заданном времени переходного процесса t_{nn} можно выбрать в качестве эталонной модели апериодическое звено с постоянной времени $T_m = t_{nn} / 3$.

Если допускается перерегулирование σ, можно выбрать эталон в виде колебательного звена:

$$W_m(s)=\frac{1}{T_m^2 s^2+2T_m \xi s+1} \quad . (1)$$

Для такого звена время переходного процесса – около $5T_m$, а перерегулирование примерно равно $e^{-\pi\xi}$. Поэтому при заданных времени переходного процесса t_{nn} и перерегулировании σ параметры эталонной модели вычисляются по формулам

$$T_m \approx \frac{t_{nn}}{5} \quad , \quad \xi \approx -\frac{\ln(\sigma)}{\pi} \quad . (2)$$

Такую модель можно дискретизировать с помощью метода фиктивного квантования, установив на её входе импульсный элемент с фиксатором нулевого порядка:

$$W_m(\zeta) = Z\{ W_m(s)\cdot H(s) \}.$$

Во многих случаях регулятор с двумя степенями свободы (см. Рис. 29) позволяет сделать так, чтобы переходный процесс в цифровой системе в моменты квантования точно совпадал с переходным процессом в эталонной системе.

Представим дискретную модель объекта и эталонную модель как отношение полиномов:

$$D(\zeta)=\frac{n(\zeta)}{d(\zeta)} \quad , \quad W_m(\zeta)=\frac{n_m(\zeta)}{d_m(\zeta)} \quad .$$

Выполним факторизацию полинома $n(\zeta)$:

$$n(\zeta) = n^+(\zeta)\cdot n^-(\zeta) ,$$

где полиномы $n^+(\zeta)$ и $n^-(\zeta)$ – это устойчивый и неустойчивый сомножители полинома $n(\zeta)$, соответственно. Для того чтобы в результате получилась устойчивая система, необходимо, чтобы числитель эталонной модели содержал в качестве сомножителя полином $n^-(\zeta)$:

$$n_m(\zeta) = n^-(\zeta)\cdot n_{m0}(\zeta) .$$

Полиномы регулятора, обеспечивающего точное совпадение переходных процессов с эталонной моделью, вычисляются по формулам:

$$a_1(\zeta) = n_{m0}(\zeta), \quad b(\zeta) = n^+(\zeta)\cdot b_0(\zeta),$$

а полиномы $a_0(\zeta)$ и $b_0(\zeta)$ определяются из решения полиномиального уравнения

$$a_0(\zeta)\cdot n^-(\zeta) + b_0(\zeta)\cdot d(\zeta) = d_m(\zeta) .$$

Для того чтобы обеспечить компенсацию постоянных (или даже линейно возрастающих) возмущений может потребоваться включить в состав регулятора интегрирующие звенья. Если нужно добавить l интегрирующих звеньев, формулы немного изменятся :

$$a_1(\zeta) = n_{m0}(\zeta), \; b(\zeta) = n^+(\zeta)\cdot b_0(\zeta)\cdot(\zeta-1)^l ,$$

$$a_0(\zeta) n^-(\zeta) + b_0(\zeta)\cdot(\zeta-1)^l \cdot d(\zeta) = d_m(\zeta) .$$

Синтез регулятора с двумя степенями свободы выполняется с помощью функции ddesign2dof, которая входит в библиотеку ddesign.sci:

```
[a0,a1,b] = ddesign2dof( Dzeta, WmZeta )
```

Эта функция принимает два аргумента – дискретную модель объекта и дискретную модель эталонной системы (обе – функции переменной ζ). Результат функции – три полинома от переменной ζ, формирующие регулятор с двумя степенями свободы.

Рассмотрим численный пример. Построим цифровой регулятор с двумя степенями свободы для объекта с передаточной функцией:

$$P(s)=\frac{0.1}{s(10s+1)} \quad .$$

Введём модель объекта и выполним её дискретизацию при $T = 1$:

```
P = syslin( "c", 0.1, %s*(10*%s+1) );
T = 1;
D = ss2tf ( dscr(P,T) );
```

Затем перейдём к переменной ζ, выполнив с помощью функции horner замену $z = 1 / \zeta$:

```
Dzeta = horner( D, 1/%z );
```

В качестве эталонной модели используем колебательное звено с указанной ранее передаточной функцией (1). Поставим задачу обеспечить время переходного процесса $t_{nn} = 5$ и перерегулирование $\sigma = 10\%$. Постоянную времени и коэффициент демпфирования вычисляем по формулам (2):

```
tpp = 5;
sigma = 0.1;
Tm = tpp / 5;
ksi = -log(sigma) / %pi;
Wm = syslin( "c", 1, ..
            Tm^2*%s^2 + 2*ksi*Tm*%s + 1 );
```

Строим эталонную дискретную модель и выполняем замену $z = 1 / \zeta$ с помощью функции horner:

```
WmZ = ss2tf( dscr(Wmc, T) );
WmZeta = horner( WmZ, 1/%z );
```

Для построения полиномов регулятора с двумя степенями свободы вызываем функцию ddesign2dof из библиотеки ddesign.sci:

```
[a0,a1,b] = ddesign2dof( Dzeta, WmZeta )
```

Строим передаточные функции двух блоков регулятора:

```
C0zeta = syslin( "d", a0, b );
C0 = horner( C0zeta, 1/%z );
C1zeta = syslin( "d", a1, b );
C1 = horner( C1zeta, 1/%z );
```

В результате получаем

$$C_0(z)=239.338\cdot\frac{z-0.582}{z+0.967}\quad,\quad C_1(z)=62.19\cdot\frac{z+0.608}{z+0.967}\quad.$$

По этим передаточным функциям видно, что регулятор компенсирует нуль дискретной модели объекта в точке z = – 0,967 (с отрицательной вещественной частью). Поэтому следует ожидать скрытых колебаний в системе между моментами квантования.

Вычислим характеристический полином и его корни:

```
DeltaZ = C0.num*D.num + C0.den*D.den;

rtsZ = roots( DeltaZ );
```

Три корня характеристического полинома

```
rtsZ =

- 0.967 0.374

+ 0.302i 0.374

- 0.302i
```

по модулю меньше 1, то есть система устойчива. Один из корней, в точке z = – 0,967 обусловлен сокращением пары нуль-полюс в произведении *D(z)* $\cdot C_0(z)$.

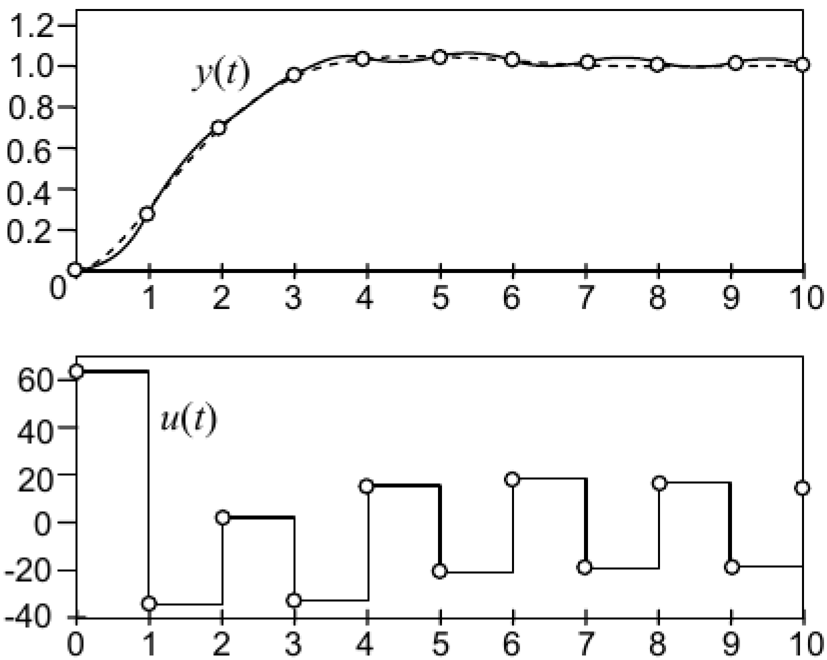

Рис. 30.

На Рис. 30 показаны переходные процессы в цифровой системе с регулятором с двумя степенями свободы (сплошные линии) и в эталонной системе (штриховая линия). По графикам видно, что в моменты квантования удалось обеспечить точное соответствие модели, а между моментами квантования наблюдаются скрытые колебания. Признаком скрытых колебаний является слабозатухающий характер сигнала управления (нижний график). Для того чтобы устранить скрытые колебания, нужно при факторизации считать все корни полиномов с отрицательной вещественной частью неустойчивыми, так чтобы они не сокращались регулятором. С этой целью в вызов функции ddesign2dof нужно добавить два необязательных аргумента:

количество интегрирующих звеньев l и параметр α, который определяет область корней, при факторизации считающихся неустойчивыми. В данном случае принимаем $l = 0$ и $\alpha = 0$:

```
ell = 0;
alpha = 0;
[a0,a1,b] = ddesign2dof(Dzeta, WmZeta, ..
            ell, alpha);
```

Повторяя те же вычисления, что и выше, получаем передаточные функции двух блоков регулятора:

$$C_0(z)=141.949\cdot\frac{z-0.642}{z+0.471}\quad,\quad C_1(z)=31.613\cdot\frac{z+0.608}{z+0.471}\quad.$$

Среди корней характеристического полинома

```
rtsZ =
0.374 + 0.302i
0.374 - 0.302i
0
```

нет корней с отрицательной вещественной частью, поэтому скрытые колебания маловероятны. Это подтверждают результаты моделирования, показанные на Рис. 31.

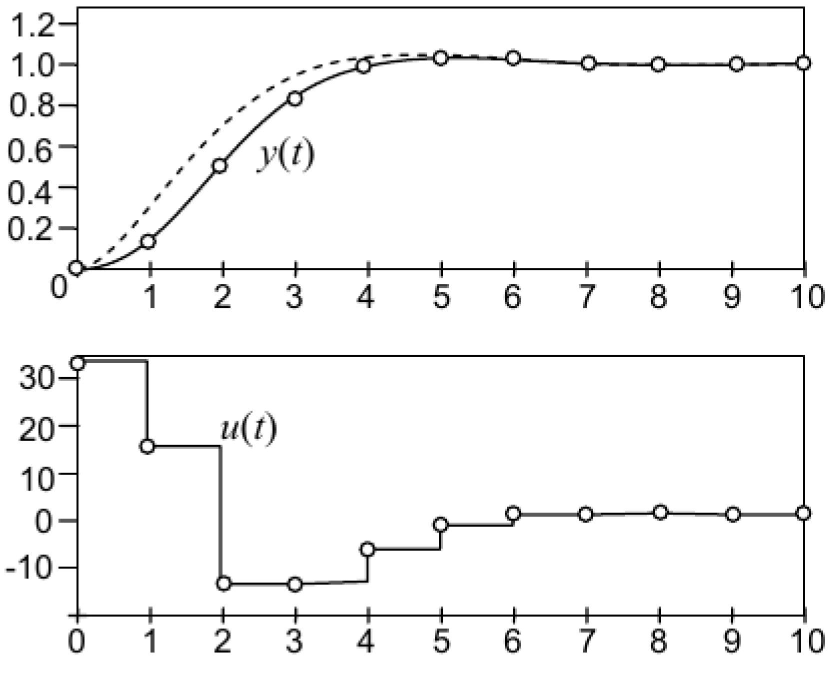

Рис. 31.

Заметим, что цифровая система уже не точно воспроизводит эталонный процесс даже в моменты квантования. Наблюдаемое запаздывание в течение первых 5 секунд является платой за отсутствие скрытых колебаний в системе.