

Направление подготовки: 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Наименование образовательной программы: Электрический транспорт

Уровень образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Дисциплина:

"Моделирование устройств электрической тяги"

Комаров В.Г.

Лекция 7

15.10.2026 г.

Основы теории подобия

Ретроспективный (исторический) анализ развития теории подобия

Теория подобия как и всё научное знание исторически проходит свой эволюционный путь развития. Изначально подобие рассматривалось в пространственном (геометрическом) смысле, как соотношение пространственных (геометрических) параметров форм объектов. Например, подобие треугольников и других геометрических фигур. Подобные фигуры рассматривались в Древней Греции уже в V—IV веках до нашей эры. Они появились в трудах Гиппократы Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и в VI книге «Начал» Евклида.

При создании модели вначале производится исследование и анализ изучаемого явления, выявление основных факторов, влияющих на процесс и упрощающих его формальное описание, исследование явления на упрощенной модели, а затем представление полученных результатов в виде расчетных формул и перенос их на натуральный объект. Для сопоставимости результатов модельных и натуральных явлений необходимо обеспечить их подобие.

Подобие фигур применяется к решению многих задач на построение. Метод подобия состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Этот метод особенно удобен тогда, когда только одна данная величина есть длина, а все прочие величины — или углы, или отношения линий.

Классическим примером задачи на метод подобия является построение окружности, касающейся двух сторон данного угла и проходящей через данную точку.

Фигура F называется подобной фигуре F' , если существует преобразование подобия, при котором $F \mapsto F'$.

- Подобие фигур является отношением эквивалентности.
- Для обозначения подобия обычно используется значок $\sim$ — $F \sim F'$ означает, что фигуры F и F' подобны. Этот же значок используется для обозначения эквивалентности.

Отношение эквивалентности — бинарное отношение между элементами данного множества, свойства которого сходны со свойствами отношения равенства.

Для отношения эквивалентности должны выполняться следующие условия:

- рефлексивность;
- симметричность;
- транзитивность.

Свойства подобия евклидова пространства

- Подобие есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства на себя.
- Подобие является аффинным преобразованием плоскости.
- Подобие сохраняет порядок точек на прямой, то есть если некоторая точка лежит между точками в оригинале, то в образе сохраняется соответствующая последовательность образов этих точек.
- Точки, не лежащие на прямой, при любом подобии переходят в точки, не лежащие на одной прямой.
- Подобие преобразует прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, угол в угол, окружность в окружность.
- Подобие сохраняет величины углов между кривыми.
- Подобие с коэффициентом не равным единице, преобразующее каждую прямую в параллельную ей прямую, является гомотетией с положительным или отрицательным коэффициентом.
- Каждое подобие можно рассматривать как композицию движения и некоторой гомотетии с положительным коэффициентом.
- Подобие называется **собственным (несобственным)**, если движение является собственным (несобственным). Собственное подобие сохраняет ориентацию фигур, а несобственное — изменяет ориентацию на противоположную.
- Два треугольника в евклидовой геометрии являются подобными, если
- их соответственные углы равны, или
- стороны пропорциональны.
- Площади подобных фигур пропорциональны квадратам их сходственных линий (например, сторон). Так, площади кругов пропорциональны отношению квадратов их радиусов.

Расширение пространственного подобия на подобие физических явлений

Когда элементы геометрического подобия стали применяться в предметно-практической деятельности человека, в частности в древнем строительстве, то возникли проблемы с адекватностью производимых расчётов. Возникла проблема соотношений слона и комара. Перед древними строителями возник вопрос, можно ли в геометрических пропорциях построить статую комара в размерах слона? Тот же вопрос стоял при строительстве зданий и особенно мостов. И оказалось, что нельзя. Возникшие проблемы состояли в нарушении прочности объектов. Ответ на этот вопрос можно было найти уже в подобии площадей круга: площади кругов пропорциональны не в отношении их радиусов, а в отношении квадратов их радиусов. Прочность конструкции определяется площадью поперечных сечений несущих элементов конструкции, т.е. размерностью L^2 , а масса и, соответственно, вес и динамические силы определяются объёмом, т.е. размерностью L^3 .

Первые строгие научные формулировки условий подобия физических явлений и уточнения этого понятия применительно к механическим движениям были даны лишь в XVII веке И. Ньютоном.

Его принято считать основателем теории подобия, как одной из основ теории моделирования. Подобие стало рассматриваться как соотношения физических процессов, т. е. как физическое подобие. Было выявлено, что для подобных явлений можно вывести математические

выражения, которые являются **инвариантами**, т. е. они принимают одни и те же численные значения в сходственных точках подобных явлений. Такие инварианты называли критериями подобия физических явлений. В механических системах к таким инвариантам можно отнести, например, произведение силы и длины, делённое на массу и скорость в квадрате, что следует из связи силы, массы и ускорения во втором законе Ньютона. Этот инвариант называется критерием подобия Ньютона:

$$\pi_{Ne} = \frac{F \cdot x}{m \cdot v^2} = \frac{F \cdot t^2}{m \cdot x}$$

Подобие физических явлений разной природы

По мере развития научного знания стало понятным, что разные по своей природе явления зачастую описываются одними и теми же по форме математическими уравнениями. Это свойство было названо **изоморфизмом** законов природы. Математики пошли дальше и ввели понятие **конформизма**, как нелинейного отображения физических закономерностей. Conformis (лат.) - подобный. Физические явления окружающего мира описываемые изоморфными или конформными уравнениями, могут быть подобными. Это значит, что между ними может быть установлено взаимно однозначное соответствие, позволяющее рассматривать выводы, полученные при изучении одного явления, на другое явление. Исходя из этого с начала XX века теорию подобия стали распространять и на явления разной природы, т. е. стали использоваться разного рода математические аналогии.

Например, начиная с 1936 г. Л.И.Гутенмахер развивал теорию моделей на основе электромеханических аналогий, позволяющих использовать в механике методы анализа электрических цепей. Позднее с помощью электромеханических аналогий стали изучаться самые различные динамические системы разной природы. Таким образом, математическое моделирование, которое вначале основывалось на моделях одинаковой физической природы, перешло к структурным моделям, в которых отсутствует прямая физическая аналогия с изучаемым процессом или явлением. Вместо этого в структурных моделях воспроизводятся математические операции, соответствующие решению систем уравнений, описывающих изучаемый процесс. Такой подход в теории моделирования вначале обеспечил широкое использование аналоговых вычислительных машин, а затем подготовил новый современный этап, связанный с использованием в качестве основы структурного моделирования цифровых электронно-вычислительных машин — компьютеров.

Кроме того математическое моделирование стало опираться на теорию конформных отображений — взаимно однозначных отображений в искривлённых (нелинейных) пространствах, например, Риманова многообразия.

Математическая формализация теории подобия

Каждый объект имеет свои качества, которые проявляются через его действия на другие объекты. Эти действия характеризуются свойствами объекта и могут быть соотнесены разделением на классы или путём количественной оценки. Количественное соотношение однородных свойств, т. е. свойств одного класса, может быть определено измерением, а разнородных только выявлением закономерностей в виде определительных уравнений. Выявление закономерностей производится статистическими методами на основе теории вероятности или аналитически на основе формального анализа предшествующего накопленного опыта. Свойства оцененные количественными отношениями становятся

параметрами объекта. Формальное соотношение свойств может производиться в виде математического выражения или функции. Математическое выражение, описывающее соотношение рассматриваемых свойств объекта называется определительным уравнением.

В общем виде отношения между величинами оригинала могут быть представлены в виде системы (множества) логических выражений

$$L(X) = \{L_1(X), L_2(X), \dots, L_i(X), \dots, L_m(X)\}.$$

Каждое логическое выражение $L_i(X)$ может содержать равенства (уравнения) и неравенства, соединенные знаками логических операций (логическое И), (логическое ИЛИ) и $\sim$ (логическое НЕ). В качестве величин в эти выражения входят элементы множества X .

Так как модель и оригинал должны описываться изоморфными отношениями, то отношения между величинами модели должны быть представлены в виде такого же множества выражений L , что и оригинал.

Если оригинал представить кортежем, состоящим из двух множеств

$$M = \langle X, L(X) \rangle,$$

то модель –

$$M' = \langle X', L(X') \rangle.$$

Множество отношений $L(X)$ можно разложить на два независимых множества: систему уравнений (равенств) $\varphi(X)$ и систему ограничений (неравенств) $\omega(X)$. Для модели также можно осуществить аналогичное разложение на $\varphi(X')$ и $\omega(X')$.

Дальнейшие рассуждения будем вести для систем уравнений $\varphi(X)$ и $\varphi(X')$. Аналогичные рассуждения можно провести и для систем неравенств $\omega(X)$ и $\omega(X')$.

Пусть зависимости между величинами оригинала выражены в виде системы из p уравнений.

В наиболее общем виде каждое уравнение может быть представлено в виде суммы слагаемых, в которую входят:

- 1) степенные комплексы, образованные из самих величин из множества X , их производных и интегралов,
- 2) трансцендентные (неалгебраические, то есть которые не могут быть представлены в виде степенных комплексов) и сложные функции величин.

Разделим все члены каждого из уравнений на один из его членов, заведомо не равный нулю, чтобы все члены уравнений стали безразмерными.

Аналогичную операцию проведём для модели, выразим все величины модели через соответствующие величины оригинала с помощью масштабных коэффициентов и вынесем все масштабные коэффициенты за скобки.

Системы уравнений оригинала и модели становятся тождественными лишь при выполнении следующих двух условий:

- равенстве единице всех степенных комплексов, образованных из масштабов при всех величинах;
- равенстве всех трансцендентных функций для оригинала и модели.

Свойства этих уравнений оставаться неизменными при умножении каждой из величин X_i на соответствующий масштаб m_i называется *инвариантностью по отношению к подобному преобразованию входящих в них величин*.

Условия инвариантности трансцендентных функций сводятся к инвариантности их аргументов. Равенство возможно только в случае, когда выполняется условие $X'_1 X'_2 X'_3 = X_1 X_2 X_3$, а аргументы этих функций должны быть безразмерными функциями величин X_i .

Из проведённого нами преобразования можно сформулировать первую теорему подобия в следующем виде: *подобные явления описываются буквенно одинаковыми уравнениями, которые инвариантны по отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин*.

Если вместо масштабов подставить соответствующие величины, получим критерии подобия, являющиеся безразмерными соотношениями этих величин.

Аналогичные выражения можно получить для критериев подобия, обеспечивающих идентичность трансцендентных функций. Они выводятся из условия равенства единице степенных комплексов, образованных из масштабов при безразмерных членах аргументов трансцендентных функций. При этом получаем еще ряд дополнительных критериев.

Выведенные таким образом критерии подобия называются *критериями, полученными из анализа уравнений связи*. В зависимости от того, на какой из членов разделено исходное уравнение при переходе к безразмерной форме, запись критериев может быть различной.

Наиболее простым и наглядным является геометрическое подобие. Две геометрические фигуры подобны, если они могут стать тождественными вследствие однородного изменения их размеров, то есть путем одинакового растяжения или сжатия осей координат. Такое подобие называется *геометрическим*. При этом *коэффициент подобия*, или *масштаб m* , одинаков для всех одноименных размеров:

$$mx = my = mz = m,$$

то есть для некоторой функции $\theta(x,y,z)$ справедливо соотношение

$$\theta(m(x,y,z)) = \theta(x', y', z'),$$

где x,y,z – координаты фигуры-оригинала; x',y',z' – координаты фигуры-модели.

Если величины, характеризующие процессы, проходящие в системе, отличаются от соответствующих величин в другой системе постоянными коэффициентами, то имеет место *подобие явлений*. То есть *условием подобия является постоянство всех масштабов подобия*. Если соответствующие пары величин характеризуют процессы одинаковой физической природы, то имеет место *физическое подобие* систем.

Если между соответствующими изменяющимися величинами имеется пропорциональность, но эти величины имеют различную природу, то говорят о *математическом подобии*, или об *аналогии*. При этом общим в сравниваемых явлениях будут не их качественные свойства, а формальные отношения между элементами систем.

Для достижения математического подобия необходимо, чтобы обе системы описывались одинаковыми по виду уравнениями.

Два явления можно считать подобными, если все масштабы подобия представляют собой постоянные величины, то есть

$$mi = const.$$

Условие подобия явлений может быть определено и другим образом: через выражение величин в относительной, безразмерной форме. Для этого за единицу измерения каждой из величин принимают какое-то характерное ее значение в оригинале, которое называется *базисным значением*: X_i^b . Тогда соответствующие величины в модели будут измеряться безразмерными числами.

Рассмотрим простой пример движения материальной точки массой M под воздействием постоянной силы F и силой сопротивления движению, пропорциональной скорости v . Согласно второму закону Ньютона имеем уравнение движения:

$$F = Wv + M \frac{dv}{dt},$$

в которой взаимодействуют пять величин: F, v, W, M, t . Разделив все члены уравнения на W и обозначив $V_\infty = \frac{F}{W}$, $T = \frac{M}{W}$, получаем:

$$V_\infty = v + T \frac{dv}{dt}.$$

Выбрав за базовые величины $V_0 = V_\infty$, $t_0 = T$, имеем:

$$1 = \dot{v} + \frac{d\dot{v}}{d\dot{t}},$$

где $\dot{v} = \frac{v}{V_{\infty}}$, $\dot{t} = \frac{t}{T}$.

В последней модели фигурируют уже не пять, а всего две величины.

Теперь рассмотрим пример с математической моделью электрической RL-цепи

$$U = iR + L \frac{di}{dt} ,$$

в которой взаимодействуют пять величин: U, i, R, L, t . Разделив все члены уравнения на R и обозначив $I_{\infty} = \frac{U}{R}$, $T = \frac{L}{R}$, получаем:

$$I_{\infty} = i + T \frac{di}{dt}$$

Выбрав за базовые величины $I_0 = I_{\infty}$, $t_0 = T$, имеем:

$$1 = \dot{i} + \frac{d\dot{i}}{d\dot{t}} ,$$

где $\dot{i} = \frac{i}{I_{\infty}}$, $\dot{t} = \frac{t}{T}$.

В последней модели также, как и в модели механического движения фигурируют уже не пять, а всего две величины.

Рассмотрев модель нагревания твёрдого тела, можно также придти к аналогичной математической модели. Уравнение нагревания однородного твёрдого тела

$$P = A \cdot \theta + C \frac{d\theta}{dt} ,$$

где P – мощность нагревателя, A – теплоотдача в окружающую среду, C – теплоёмкость тела, θ – превышение температуры над окружающей средой. В этой модели также взаимодействуют пять величин: P, θ, A, C, t . Разделив все члены уравнения на A , и обозначив $\Theta_{\infty} = \frac{P}{A}$, $T = \frac{C}{A}$, получаем:

$$\Theta_{\infty} = \theta + T \frac{d\theta}{dt}$$

Это уравнение означает, что при мощности нагревателя P и теплоотдаче A достигается установившееся превышение температуры тела Θ_{∞} над окружающей средой, в котором

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ и, соответственно}$$

$$A = \frac{P}{\Theta_{\infty}} .$$

Выбрав за базовые величины $\theta_0 = \Theta_{\infty}$ и $t_0 = T$, имеем:

$$1 = \dot{\theta} + \frac{d\dot{\theta}}{d\dot{t}} ,$$

где $\dot{t} = \frac{t}{T}$ - относительное время,

$\dot{\theta} = \frac{\theta}{\Theta_{\infty}}$ - относительное превышение температуры.

В этой модели также, как и в предыдущих фигурируют не пять, как в начале, а всего две величины.

и обозначив $Q_{\infty} = \frac{P}{A}$, $T = \frac{C}{A}$

Таким образом исходя из подобия можно производить обобщение моделей, т.е. перестроение модели с сокращением в ней числа размерных величин — переменных, параметров, констант и объединение их в безразмерные комплексы, позволяющие представить модель в более универсальном виде, пригодном для более широкого круга подобных объектов. Однако следует заметить, что такое упрощение модели имеет смысл лишь в том случае, если величины, выбранные за базовые, являются константами, хотя бы в заданных пределах изменения входных величин. Поиск таких констант, а также предельных значений входных величин, гарантирующих постоянство отношений рассматриваемых процессов и является задачей адекватного моделирования. Например, в первом случае это постоянство коэффициента сопротивления движению W , во втором электрического сопротивления цепи R , а в третьем - теплоотдачи в окружающую среду A .

Логика процессов в теории подобия

В определённых условиях величины, выбранные в качестве констант могут начать кардинально изменяться, нарушая адекватность модели. В этом случае мы можем говорить о качественных изменениях в объекте и процессах — переходе из одного класса явлений в другие, т. е. перехода количественных изменений в качественные. Так, например, при изменениях агрегатного состояния вещества кардинально меняются закономерности протекающих процессов. Например, вода до 0°C является твердым телом, от 0 до 100°C жидким, а после 100°C газообразным веществом. То же относится и к любым конструкционным материалам. Качественные изменения происходят при достижении параметрами объекта определённых критических значений. Например, для агрегатного состояния вещества это температура плавления и кипения. Точно также критическими значениями являются граница текучести и предел прочности конструкционных материалов, напряжение пробоя электрической изоляции и т. п. В полевых структурах это может быть напряжённость полей или их кривизна.

Качественные изменения объектов характеризуются логикой процессов, которая строится на основе событий, отражающих качественные переходы объектов. Соотношение классов до и после перехода отображаются с помощью функций формальной логики или Булевой алгебры. События выделяются в моделях в отдельный класс отношений (связей) процессов, отражающих причинно-следственные связи. Время также относится к событийным процессам. Между событиями объект находится в состояниях, характеризующихся некоторым постоянным соотношением величин, называемым критериями подобия. Качественные изменения объекта таким образом отражаются изменениями структуры основных взаимосвязей модели, заключающиеся в замене критериев подобия.

Литература:

1. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. — : Высшая школа, 1973. — 296 с.
2. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы. — : Мир, 1968. — 302 с.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — : Наука, 1987. — 423 с.